Exercice 1 *(2points)*

Un professeur de mathématiques vend plusieurs interrogations et affirme que 90% de ses interrogations sont corrigés. Ses élèves prélèvent au hasard un échantillon de 400 interrogations et constatent que 330 copies sont corrigés.

1) Peut-on remettre en doute l'affirmation du professeur au seuil de 95%? Justifier

2) Déterminer un intervalle de confiance de la proportion d'interrogation corrigées par le professeur.

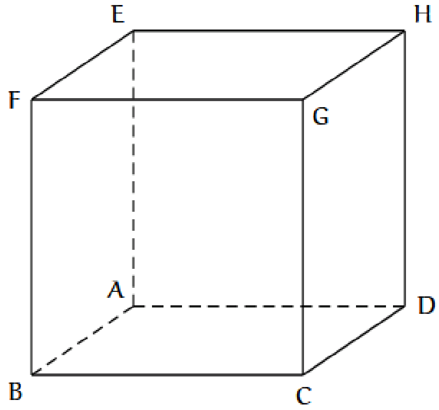
Exercice 2 *(3points)*

On se place dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1) Placer sur le cube les points :

$I\left(1 ; \frac{1}{3} ; 0\right)$, $J\left(0 ; \frac{2}{3} ; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4} ; 0 ; 1\right)$ et $L\left(\frac{1}{4} ; 1 ; 0\right)$

2) IKJL est-il un parallélogramme? Justifier.



Exercice 3 *(3points)*

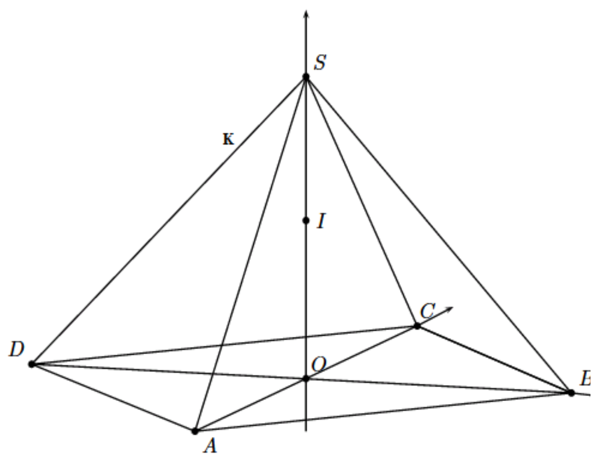
Soit SABCD un pyramide à base carrée de centre O, I milieu de [SO] et K tel que $\vec{SK} = \frac{1}{3}\vec{SD}$

On se place dans le repère $(O ; \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OS})$.

1) Montrer que $\vec{OK} = -\frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{2}{3}\vec{OS}$

2) Déterminer les coordonnées des points B, I et K

3) Montrer que les points B, I et K sont alignés



Exercice 4 *(2points)*

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ? Justifier

Correction exercice 1

$p=0,9$, $n=400$ et $f=\frac{330}{400}$

1) Pour vérifier si l'affirmation du professeur est correcte à 95%, on doit calculer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% :
Vérification des conditions : $n=400>30$, $np=360>5$ et $n(1-p)=40>5$

$$\mathrm{I}_{400}=\left[0,9-1,96\frac{\sqrt{0,9\times0,1}}{\sqrt{400}};0,9+1,96\frac{\sqrt{0,9\times0,1}}{\sqrt{400}}\right]=[0,871;0,929]$$

Or $f=\frac{330}{400}=0,825$ n'appartient pas à l'intervalle I_{400} , donc on rejette l'affirmation du professeur et on est certain de ne pas se tromper à 95%.

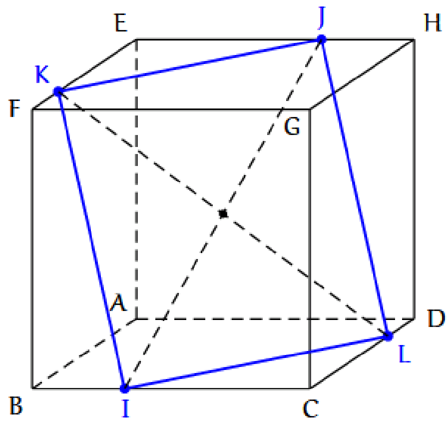
2) Calculons l'intervalle de confiance de p :
Vérification des conditions : $n=400>30$, $nf=330>5$ et $n(1-f)=70>5$

$$\mathrm{J}=\left[0,825-\frac{1}{\sqrt{n}};0,825+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=[0,775;0,875]$$

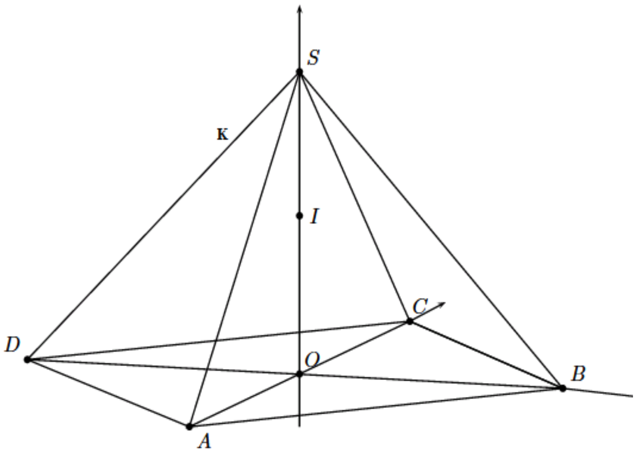
Ainsi, nous sommes certains à 95% que la proportion de copies corrigées par le professeur est comprise entre 77,5% et 87;5%

Correction exercice 2

Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{3},1\right)$ de même que le vecteur $\overrightarrow{LJ}$. Donc, $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{LJ}$ ou encore le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.



Correction exercice 3



1) $\vec{OK}=\vec{OS}+\vec{SK}$

$$= \vec{OS}+\frac{1}{3}\vec{SD}$$

$$= \vec{OS}+\frac{1}{3}\left(\vec{SO}+\vec{OD}\right)$$

$$= \vec{OS}-\frac{1}{3}\vec{OS}+\frac{1}{3}\vec{OD}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{OS}-\frac{1}{3}\vec{OB}$$

2) On a $B(1;0;0)$ et $I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$. Déterminons les coordonnées du point K

On a $\vec{OK}=-\frac{1}{3}\vec{OB}+\frac{2}{3}\vec{OS} = -\frac{1}{3}\vec{OB}+0\times\vec{OC}+\frac{2}{3}\vec{OS}$

donc les coordonnées de K dans le repère $\left(O;\vec{OB},\vec{OC},\vec{OS}\right)$ sont $K\left(-\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right)$

3) Les points B, I et K sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BK}$ sont colinéaires.

Méthode 1 : avec les coordonnées

$B(1;0;0)$, $I\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ et $K\left(-\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right)$ et $\vec{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{BK}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ On a $\vec{BK}=\frac{4}{3}\vec{BI}$

Ainsi, les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BK}$ sont colinéaires, donc les points B, I et K sont alignés.

Méthode 2 : sans les coordonnées

D'une part $\vec{BI}=\vec{BO}+\vec{OI}$

D'autre part

$$\vec{BK}=\vec{BS}+\vec{SK}$$

$$\vec{BK}=\vec{BO}+\vec{OS}+\vec{SK}$$

$$\vec{BK}=\vec{BO}+2\vec{OI}+\frac{1}{3}\vec{SD}$$

$$\vec{BK}=\vec{BO}+2\vec{OI}+\frac{1}{3}\left(\vec{SO}+\vec{OD}\right)$$

$$\vec{BK}=\vec{BO}+2\vec{OI}+\frac{1}{3}\left(-2\vec{OI}+\vec{BO}\right)$$

$$\vec{BK}=\frac{4}{3}\vec{BO}+\frac{4}{3}\vec{OI}$$

On a $\vec{BK}=\frac{4}{3}\vec{BI}$

Ainsi, les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BK}$ sont colinéaires, donc les points B, I et K sont alignés.

Correction exercice 4

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

Or $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v} \iff \begin{cases} 4=x+2y \\ -2=3x-y \\ 1=2x+3y \end{cases}$

A l'aide des deux premières lignes, on a :

$x=4-2y \iff -2=3(4-2y)-y = -2=12-7y \iff 7y=14 \iff y=2$

Donc $x=4-2y=4-2\times 2=0$ ainsi $x=0$

Vérifions si les valeurs de x et de y sont solutions de la 3e ligne : $2\times 0+3\times 2=6\neq 1$

Ainsi, il n'existe pas de valeurs de x et de y telles que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

Donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires